BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2015

RİYAZİYYAT

УДК 517.977

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ КВАЗИОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

К.Б.МАНСИМОВ[*,], М.Я.НАДЖАФОВА[**]**

[*]Бакинский Государственный Университет

[**]Институт Систем Управления НАН Азербайджана

mansimov@front.ru

Рассматривается задача оптимального управления описываемая системой разностных уравнений с нелокальными краевыми условиями. Получен аналог линеаризованного условия максимума. Исследован квазиособый случай.

Ключевые слова: разностное уравнение, необходимое условие оптимальности, квазиособое управление, нелокальная краевая задача.

Дискретные динамические модели управляемых систем являются очень важным в теоретическом и практическом отношении классом математических моделей, позволяющие охватить широкий круг реальных объектов и соответствующих им задач управления. Дискретные динамические модели возникают, например, при моделировании задач распределения ресурсов, обработке и передаче информации цифровыми электронными устройствами, а также при дискретизации непрерывных динамических моделей (см. напр. [1-6]).

К настоящему времени разработаны многочисленные точные и приближенные методы решения задач оптимального управления дискретными системами. Однако почти все они описываются локальными краевыми условиями.

Данная работа посвящена исследованию одной дискретной задачи оптимального управления с нелокальными краевыми условиями. Установлены, необходимые условия оптимальности при предположении выпуклости области управления.

Постановка задачи. Рассмотрим дискретную систему управления

$$x(t+1) = f\left(t, x(t), u(t)\right), \quad t \in T = \{t_0, t_0+1, \dots, t_1-1\} \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$L_0\,x(t_0)+L_1\,x(t_1)=\ell\,. \tag{2}$$

Здесь $T=\{t_0,t_0+1,...,t_1-1\}$ конечное множество последовательных натуральных чисел, причем t_0 и t_1 заданы, L_0, L_1 – заданные $(n\times n)$ постоянные матрицы, ℓ – заданный постоянный вектор, $x(t)$ вектор состояния, $u(t)$ вектор управляющих воздействий, $f(t,x,u)$ – заданная n-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (x,u) до второго порядка включительно.

Пусть U заданное непустое, ограниченное и выпуклое множество из R^r. Каждую управляющую функцию $u(t)$ удовлетворяющую условию

$$u(t)\in U\subset R^r, \qquad t\in T \tag{3}$$

назовем допустимым управлением.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u)=\varphi(x(t_0),x(t_1)) \tag{4}$$

при ограничениях (1)-(3).

Допустимое управление $u(t)$ доставляющее минимум функционалу (4) при ограничениях (1)-(3) назовем оптимальным, а соответствующий процесс $(u(t),x(t))$ − оптимальным процессом.

Формула для приращения функционала качества. Пусть $(u(t),x(t))$ − фиксированный, а $(\bar{u}(t)=u(t)+\Delta u(t),\bar{x}(t)=x(t)+\Delta x(t))$ − произвольный − допустимые процессы. Тогда ясно, что приращение $\Delta x(t)$ состояния $x(t)$ будет решением краевой задачи

$$\Delta x(t+1)=f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))-f(t,x(t),u(t)), \tag{5}$$

$$L_0\,\Delta x(t_0)+L_1\,\Delta x(t_1)=0\,. \tag{6}$$

Предположим, что $\psi(t)$ пока известная n-мерная вектор-функция, а $\lambda\in R^n$ неизвестный постоянный вектор.

Тогда из (5), (6) получим, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t)\Delta x(t+1)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t)\left[f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))-f(t,x(t),u(t))\right], \tag{7}$$

$$\lambda' L_0\,\Delta x(t_0)+\lambda' L_1\,\Delta x(t_1)=0\,. \tag{8}$$

Положим

$$H(t,x,u,\psi)=\psi'\,f(t,x,u).$$

Ясно, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t-1)\Delta x(t)=\psi'(t_1-1)\Delta x(t_1)-\psi'(t_0-1)\Delta x(t_0)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi'(t-1)\Delta x(t)\,. \tag{9}$$

С учетом соотношений (7)-(9) приращение функционала качества (4) записывается в виде

$$\Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) = \varphi(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1)) - \varphi(x(t_0), x(t_1)) + \lambda' L_0 \Delta x(t_0) +$$
$$+ \lambda' L_1 \Delta x(t_1) + \psi'(t_1 - 1)\Delta x(t_1) - \psi'(t_0 - 1)\Delta x(t_0) -$$
$$- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H(t, x(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x(t), u(t), \psi(t))] - \tag{10}$$
$$- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x(t), \bar{u}(t), \psi(t))].$$

Используя формулу Тейлора из (10) будем иметь

$$\Delta S(u) = \frac{\partial \varphi'(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_0)} \Delta x(t_0) - \frac{\partial \varphi'(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_1)} \Delta x(t_1) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\Delta x'(t_0) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x^2(t_0)} \Delta x(t_0) + 2\Delta x'(t_0) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_0) \partial x(t_1)} \Delta x(t_1) + \right.$$
$$\left. + \Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x^2(t_1)} \Delta x(t_1) \right] + \lambda' L_0 \Delta x(t_0) + \lambda' L_1 \Delta x(t_1) + \psi'(t_1 - 1)\Delta x(t_1) -$$
$$- \psi'(t_0 - 1)\Delta x(t_0) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u(t, x(t), u(t), \psi(t))\Delta u(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_x(t, x(t), u(t), \psi(t))\Delta x(t) -$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1} [\Delta x'(t) H_{xx}(t, x(t), u(t), \psi(t))\Delta x(t) + 2\Delta u'(t) H_{ux}(t, x(t), u(t), \psi(t))\Delta x(t) +$$
$$+ \Delta u'(t) H_{uu}(t, x(t), u(t), \psi(t))\Delta u(t)] + o_1\left([\|\Delta x(t_0)\| + \|\Delta x(t_1)\|]^2\right) -$$
$$- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2\left(\|\Delta x(t)\|^2, \|\Delta u(t)\|^2\right). \tag{11}$$

Если предполагать, что $\psi(t)$ и λ удовлетворяют соотношениям [7]

$$\psi(t - 1) = \frac{\partial H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x},$$
$$\psi(t_1 - 1) = -\frac{\partial \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_1)} - L_1' \lambda,$$
$$\psi(t_0 - 1) = \frac{\partial \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_0)} + L_0' \lambda,$$

тогда формула приращения (11) примет вид

$$\Delta S(u)=-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_u'(t,x(t),u(t),\psi(t))\Delta u(t)+\frac{1}{2}\left[\Delta x'(t_0)\frac{\partial^2\varphi(x(t_0),x(t_1))}{\partial x^2(t_0)}\Delta x(t_0)+\right.$$

$$\left.+2\Delta x'(t_0)\frac{\partial^2\varphi(x(t_0),x(t_1))}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}\Delta x(t_1)+\Delta x'(t_1)\frac{\partial^2\varphi(x(t_0),x(t_1))}{\partial x^2(t_1)}\Delta x(t_1)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\Delta x'(t)\frac{\partial^2 H(t,x(t),u(t),\psi(t))}{\partial x^2}\Delta x(t)+2\Delta u'(t)\frac{\partial^2 H(t,x(t),u(t),\psi(t))}{\partial u\,\partial x}\Delta x(t)+\right.$$

$$\left.+\Delta u'(t)\frac{\partial^2 H(t,x(t),u(t),\psi(t))}{\partial u^2}\Delta u(t)\right]+\eta_1(u:\Delta u). \qquad (12)$$

Здесь по определению

$$\eta_1(u:\Delta u)=o_1\left(\left[\|\Delta x(t_0)\|+\|\Delta x(t_1)\|\right]^2\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}o_2\left(\|\Delta x(t)\|^2,\|\Delta u(t)\|^2\right).$$

По предположению множество U выпуклое. Поэтому специальное приращение допустимого управления $u(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t)=\varepsilon\left[v(t)-u(t)\right],\quad t\in T. \qquad (13)$$

Здесь $\varepsilon\in[0,1]$ произвольное число, а $v(t)\in U$, $t\in T$ произвольное допустимое управление.

Через $\Delta x_\varepsilon(t)$ обозначим специальное приращение состояния, $x(t)$ отвечающее специальному приращению (13) управлению $u(t)$.

Из (5)-(6) получаем, что $\Delta x_\varepsilon(t)$ является решением линеаризованной задачи

$$\begin{gathered}\Delta x_\varepsilon(t+1)=f_x(t,x(t),u(t))\Delta x_\varepsilon(t)+f_u(t,x(t),u(t))\Delta x_\varepsilon(t)+\\+o_3\left(\|\Delta x_\varepsilon(t)\|+\|\Delta u_\varepsilon(t)\|\right),\end{gathered} \qquad (14)$$

$$L_0\,\Delta x_\varepsilon(t_0)+L_1\,\Delta x_\varepsilon(t_1)=0. \qquad (15)$$

Используя задачу (14)-(15) доказывается справедливость разложения

$$\Delta x_\varepsilon(t)=\varepsilon\,y(t)+o(\varepsilon:t), \qquad (16)$$

где $y(t)$ есть решение краевой задачи

$$y(t+1)=f_x(t,x(t),u(t))y(t)+f_u(t,x(t),u(t))(v(\tau)-u(\tau)), \qquad (17)$$

$$L_0\,\Delta y(t_0)+L_1\,\Delta y(t_1)=0. \qquad (18)$$

Решение краевой задачи (17)-(18) допускает представление [7]

$$\begin{gathered}y(t)=\Phi(t)\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}F(t_1,\tau)\,f_u(\tau,x(\tau),u(\tau))(v(\tau)-u(\tau))+\\+\sum_{\tau=t_0}^{t-1}F(t,\tau)\,f_u(\tau,x(\tau),u(\tau))(v(\tau)-u(\tau)),\end{gathered} \qquad (19)$$

где по определению

$$\Phi(t) = -F(t, t_0 - 1)\left(L_0 + L_1 F(t_1, t_0 - 1)\right)^{-1} L_1,$$

а $F(t, \tau)$ – $(n \times n)$ матричная функция, являющаяся решением задачи

$$F(t, \tau - 1)\, f_x(\tau, x(\tau), u(\tau)), \quad \tau < t,$$

$$F(t, t-1) = E,$$

(E – $(n \times n)$ единичная матрица).

Пусть

$$\alpha(\tau) = \begin{cases} 1, & t_0 \le \tau \le t - 1, \\ 0, & t \le \tau \le t_1 - 1. \end{cases}$$

Тогда представление (19) записывается в виде

$$y(t) = \sum_{\tau = t_0}^{t_1 - 1} G(t, \tau)\, f_u(\tau, x(\tau), u(\tau))(v(\tau) - u(\tau)), \tag{20}$$

где по определению

$$G(t, \tau) = \Phi(t) F(t_1, \tau) + F(t, \tau)\alpha(\tau).$$

С учетом (13), (16) из (12) получаем, что вдоль оптимального процесса $(u(t), x(t))$ выполняется неравенство

$$\begin{gathered} -\varepsilon \sum_{t = t_0}^{t_1 - 1} H_u'(t, x(t), u(t), \psi(t))(v(t) - u(t)) + \frac{\varepsilon^2}{2}\left\{ y'(t_0) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x^2(t_0)} y(t_0) + \right. \\ + 2\, y'(t_0) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x(t_0) \partial x(t_1)} y(t_1) + y'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_0), x(t_1))}{\partial x^2(t_1)} y(t_1) - \\ - \sum_{t = t_0}^{t_1 - 1} \left[y'(t) \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x^2} y(t) + (v(t) - u(t))' \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u\, \partial x} y(t) + \right. \\ \left. \left. + (v(t) - u(t))' \frac{\partial^2 H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u^2} (v(t) - u(t)) \right] \right\} + o(\varepsilon^2) \ge 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Из неравенства (21) следует аналог линеаризованного условия максимума [1-5].

Вдоль оптимального процесса $(u(t), x(t))$ для всех $v(t) \in U$, $t \in T$ выполняется неравенство

$$\sum_{t = t_0}^{t_1 - 1} H_u'(t, x(t), u(t), \psi(t))(v(t) - u(t)) \le 0. \tag{22}$$

Неравенство (22) есть необходимое условие оптимальности первого порядка. Изучим случай вырождения необходимого условия оптимальности (22).

Определение 1. Допустимое управление $u(t)$ назовем квазиособым, если для всех $v(t) \in U$, $t \in T$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_u'(t,x(t),u(t),\psi(t))(v(t)-u(t))=0. \tag{23}$$

В особом случае с учетом (23) из неравенства (21) следует, что для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\begin{gathered} y'(t_0)\frac{\partial^2\varphi(x(t_0),x(t_1))}{\partial x(t_0)^2}y(t_0)+2y'(t_0)\frac{\partial^2\varphi(x(t_0),x(t_1))}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}y(t_1)+ \\ +y'(t_1)\frac{\partial^2\varphi(x(t_0),x(t_1))}{\partial x(t_1)^2}y(t_1)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Big[y'(t)H_{xx}(t,x(t),u(t),\psi(t))y(t)- \\ +2(v(t)-u(t))'H_{ux}(t,x(t),u(t),\psi(t))y(t)+ \\ +(v(t)-u(t))'H_{ux}(t,x(t),u(t),\psi(t))(v(t)-u(t))\Big]\le 0 \end{gathered} \tag{24}$$

выполнялось для всех $v(t)\in U$, $t\in T$.

Неравенство (24) есть неявное необходимое условие оптимальности особых управлений. Опираясь на него, получим необходимое условие оптимальности особых управлений носящий явный характер. Используя представление (20) убеждаемся в справедливости соотношений

$$\begin{gathered} y'(t_0)\frac{\partial^2\varphi(x(t_0),x(t_1))}{\partial x(t_0)^2}y(t_0)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}(v(\tau)-u(\tau))'f'(\tau,x(\tau),u(\tau))\times \\ \times G'(t_0,\tau)\frac{\partial^2\varphi(x(t_0),x(t_1))}{\partial x(t_0)^2}G(t_0,s)f(s,x(s),u(s))(v(s)-u(s)), \end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered} y'(t_0)\frac{\partial^2\varphi(x(t_0),x(t_1))}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}y(t_1)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}(v(\tau)-u(\tau))'f_u'(\tau,x(\tau),u(\tau))\times \\ \times G'(t_0,\tau)\frac{\partial^2\varphi(x(t_0),x(t_1))}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}G(t_1,s)f_u(s,x(s),u(s))(v(s)-u(s)), \end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered} y'(t_1)\frac{\partial^2\varphi(x(t_0),x(t_1))}{\partial x(t_1)^2}y(t_1)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}(v(\tau)-u(\tau))'f_u'(\tau,x(\tau),u(\tau))\times \\ \times G'(t_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi(x(t_0),x(t_1))}{\partial x(t_1)^2}G(t_1,s)f_u(s,x(s),u(s))(v(s)-u(s)), \end{gathered} \tag{27}$$

$$\begin{gathered} \sum_{t=t_0}^{t_1-1}y'(t)\frac{\partial^2 H(t,x(t),u(t),\psi(t))}{\partial x^2}y(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}(v(\tau)-u(\tau))'f_u'(\tau,x(\tau),u(\tau))\times \\ \times\left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1}G'(t,\tau)\frac{\partial^2 H(t,x(t),u(t),\psi(t))}{\partial x^2}G(t,s)\right]f_u(s,x(s),u(s))(v(s)-u(s)), \end{gathered} \tag{28}$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}(v(t)-u(t))'\frac{\partial^2 H(t,x(t),u(t),\psi(t))}{\partial u\,\partial x}y(t)= \tag{29}$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{\tau=t_0}^{t-1}(v(t)-u(t))'\frac{\partial^2 H'(t,x(t),u(t),\psi(t))}{\partial u\,\partial x}G(t,\tau)\,f_u(\tau,x(\tau),u(\tau))(v(\tau)-u(\tau)).$$

По аналогии с работами [4, 7-] положим

$$M(\tau,s)=-\left[G'(t_0,\tau)\frac{\partial^2\varphi(x(t_0),x(t_1))}{\partial x(t_0)^2}G(t_0,s)+\right.$$

$$\left.+2G'(t_0,\tau)\frac{\partial^2\varphi(x(t_0),x(t_1))}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}G(t_1,s)+G'(t_1,\tau)\frac{\partial^2\varphi(x(t_0),x(t_1))}{\partial x(t_1)^2}G(t_1,s)\right]+ \tag{30}$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}G'(t,\tau)\frac{\partial^2 H(t,x(t),u(t),\psi(t))}{\partial x^2}G(t,s).$$

С учетом обозначения (30) и тождеств (25)-(29) неравенство (24) принимает вид

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}(v(\tau)-u(\tau))'\,f_u'(\tau,x(\tau),u(\tau))M(\tau,s)\,f(s,x(s),u(s))(v(s)-u(s))+$$

$$+2\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}(v(t)-u(t))'\frac{\partial H'(t,x(t),u(t),\psi(t))}{\partial u\,\partial x}G(t,\tau)\,f_u(\tau,x(\tau),u(\tau))(v(\tau)-u(\tau))+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}(v(t)-u(t))'\frac{\partial H'(t,x(t),u(t),\psi(t))}{\partial u^2}(v(t)-u(t))\le 0. \tag{31}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. Если множество U выпуклое, то для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство (31) выполнялось для всех $v(t)\in U$, $t\in T$.

Неравенство (31) есть необходимое условие оптимальности квазиособых управлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971, 507 с.
2. Пропой А.И. Элементы теории дискретных оптимальных процессов. М.: Наука, 1973, 255 с.
3. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973, 448 с.
4. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск: Наука, 1987.
5. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку: БГУ, 2013.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности высокого порядка // Препринт ИМ АН БССР, № 30 (155). Мн.: 1982, 48 с.

7. Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в одной дискретной задаче управления с нелокальными краевыми условиями // Журнал. Проблемы управления и информатики. (Киев) 2012, № 6, с. 71-79.
8. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку: Элм, 2010, 363 с.
9. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: Элм, 1999, 179 с.

LOKAL OLMAYAN SƏRHƏD ŞƏRTLİ DİSKRET OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ KVAZİMƏXSUSİ İDARƏLƏRİN OPTİMALLIĞI HAQQINDA

K.B.MƏNSİMOV, M.Y.NƏCƏFOVA

XÜLASƏ

Məqalədə qeyri-xətti fərq tənlikləri sistemi və lokal olmayan sərhəd şərtləri ilə təsvir olunan diskret optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. İdarə oblastının qabarıq olması şərti daxilində xəttiləşdirilmiş maksimum şərti formasında optimallıq üçün zəruri şərt alınmış və sonra bu zəruri şərtin cırlaşdığı hal (kvaziməxsusi hal) tədqiq edilmişdir.

Açar sözlər: fərq tənliyi, optimallıq üçün zəruri şərt, kvaziməxsusi idarə, lokal olmayan sərhəd məsələsi.

OPTIMALITY OF QUASISINGULAR CONTROLS IN THE DISCRETE OPTIMAL CONTROL PEOBLEM WITH NON-LOCAL BOUNDARY CONDITIONS

K.B.MANSİMOV, M.Y.NAJAFOVA

SUMMARY

The paper studies a discrete optimal control problem described by a system of difference equations with non-local boundary conditions. The analogue of the linearized conditions of the maximum is received. The quasisingular case is studied.

Key words: difference equation, necessary optimality conditions, quasisingular control, non-local boundary value problem.

Поступила в редакцию: 11.06.2015 г.
Подписано к печати: 12.02.2016 г.